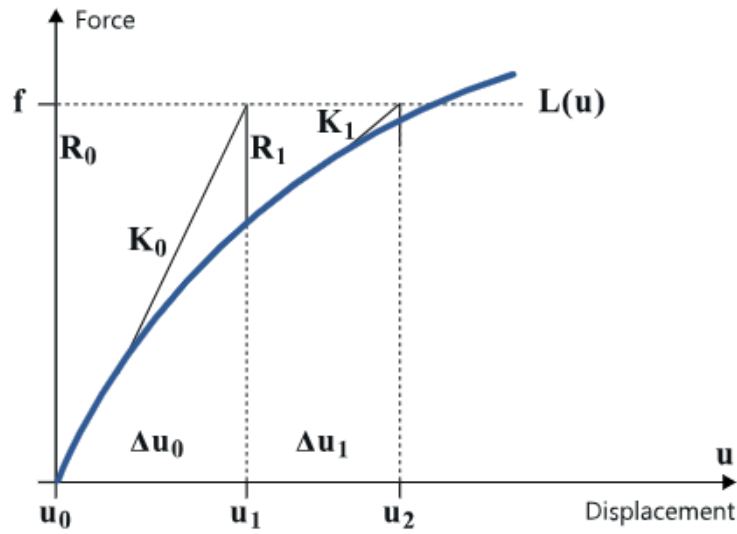


TEKNİK DOKÜMAN



Marc /Mentat

Bu teknik yazıda sonlu elemanlar analizlerinde doğrusal olmayan problemlerin çözümleri hakkında bilgi aktarımı ve Marc-Mentat yazılımında nonlinear analizlerde kullanılan çözüm yöntemlerinin açıklanmasına yönelik bilgi aktarımı ve şematik gösterimi hedeflenmektedir.



Marc-Mentat Yazılımında Kullanılan Doğrusal Olmayan (Non-linear) Çözüm Yöntemleri

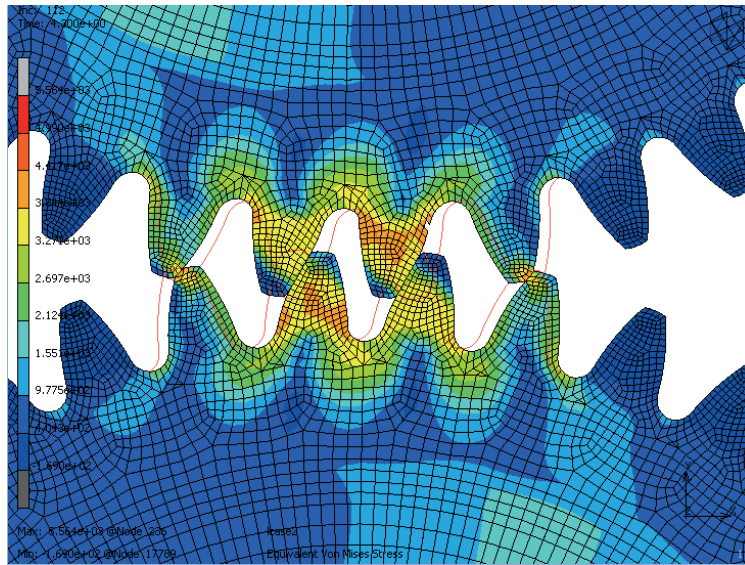
HAZIRLAYAN
Suat Uzala Yapısal Analiz Mühendisi

Tarih : 29 / 12 / 2025

Bu teknik yazıda, Marc-Mentat yazılımında doğrusal olmayan (non-linear) analizlerde kullanılan çözüm yöntemlerinin açıklanması ve nasıl kontrol edildiğine yönelik bilgi aktarımı ve şematik gösterimi hedeflenmektedir.

1. Giriş

Sonlu elemanlar analizlerinde doğrusal olmayan problemlerin çözümü, doğrusal varsayımlar altında gerçekleştirilen klasik analiz yöntemlerine kıyasla çok daha karmaşık ve ileri düzey bir yaklaşıma ihtiyaç duyar. Marc, güçlü doğrusal olmayan çözüm algoritmaları ile özellikle malzeme, geometri ve sınır şartı “temas” kaynaklı doğrusal olmayan problemlerin üstesinden gelmek için geliştirilmiş bir sonlu eleman ağı çözücüsüdür. Bu doğrusal olmayan analizlerde çözüm, zamana bağlı veya yük artışı esaslı bir yaklaşım ile kademeli şekilde ilerletilir. İşte bu noktada, Marc-Mentat’da “Stepping Procedure” adı verilen çözüm yöntemleri devreye girer. Şekil 1’de Marc-Mentat yazılımında kontak kaynaklı non-linear olmama durumunu temsil eden bir modeldir.



Şekil 1: “Doğrusal Olmayan Temas (Kontak)” İçeren Dişli Modeli

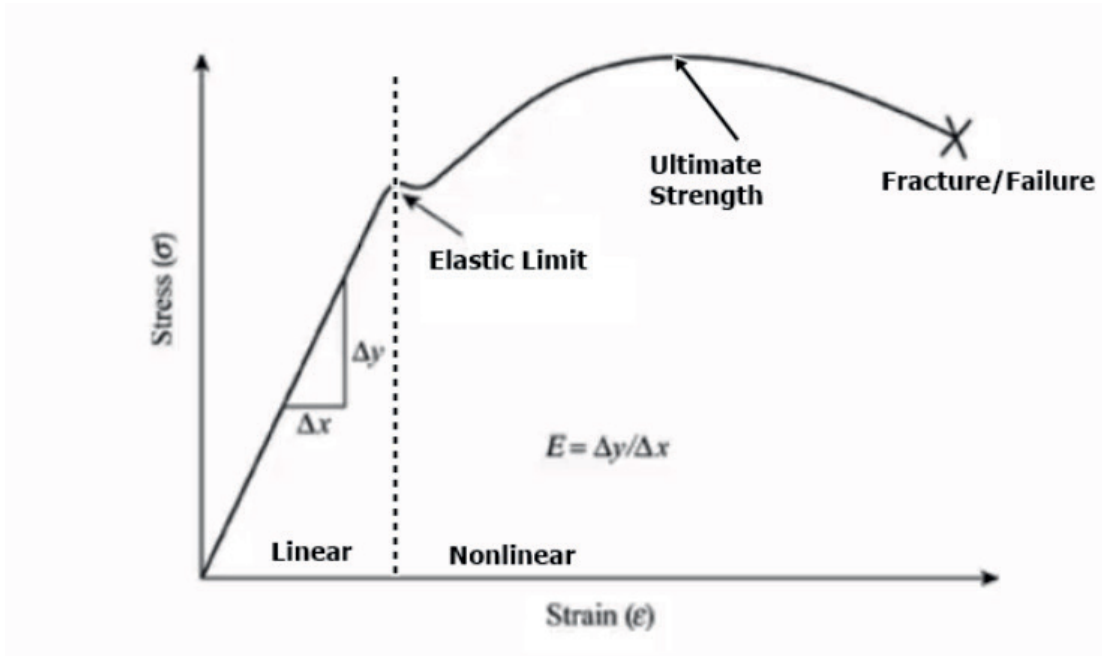
2. Doğrusal Olmayan (Non-linear) Analiz Nedir?

Sonlu elemanlar yönteminde (Finite Element Method – FEM) yapılan analizler genel olarak sistemin yük altında verdiği tepkilerin belirlenmesine dayanır. Bu tepkiler yük ile deformasyon arasındaki ilişkinin doğrusal (linear) veya doğrusal olmayan (nonlinear) karakterde olmasına göre iki ana grupta incelenir. “Non-linear” analiz, sistemin davranışının uygulanan yükle doğru orantılı olmadığı, yani yük-yer değiştirme ilişkisinin doğrusal bir denklemle tanımlanamadığı durumları ifade etmektedir. Başka bir deyişle, sistemin katılığı (stiffness) yükleme süreci boyunca sabit kalmaz; yük arttıkça yapı farklı bir rijitlik göstermektedir.

“Non-linear” analiz problemlerinde çözüm, genellikle iteratif yöntemlerle gerçekleştirilir. Bu tür analizlerde yük, tek bir adımda değil, küçük artımlar (increments) halinde uygulanır ve her artımda denge denklemleri “Newton-Raphson” veya türev yöntemleri ile tekrar tekrar çözülerek yakınsama sağlanır.

“Non-linear” analizlerin önemi, karmaşık mühendislik yapılarında gerçekçi davranışın öngörülmesinde yatar. “Doğrusal (Linear)” analiz, küçük deformasyon ve elastik davranış varsayımı altında geçerlidir; ancak yüksek yükler, temas, plastik bölgeye geçiş veya burkulma gibi durumlarda doğrusal olmayan etkilerin dikkate alınması gereklidir.

Dolayısıyla “non-linear” analiz, yapının gerçeğe en yakın şekilde modellenmesini sağlayarak tasarım güvenliğini ve performans doğruluğunu artırır.



Şekil 2: Gerilme-Gerinim Grafiği

3. Doğrusal Olmayan Davranış Türleri ve Nedenleri

Doğrusal olmayan davranış üç temel kaynaktan ortaya çıkar:

1- Malzeme Doğrusal Olmayan Davranışı (Material Nonlinearity)

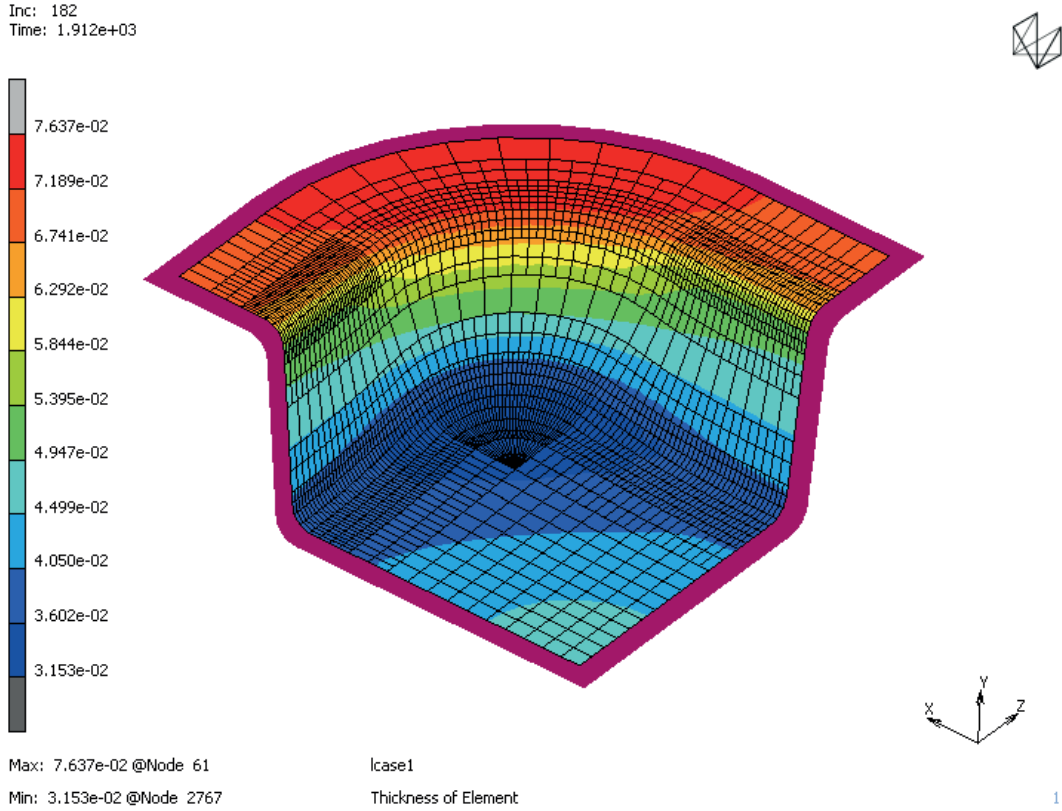
Malzemenin gerilme-şekil değiştirme ilişkisi Hooke kanununa uymadığı durumlarda görülür. Elastik sınırın aşılmasıyla plastik deformasyon, hasar veya viskoelastik davranış ortaya çıkar. (Örnek: Çelikte akma sonrası plastik şekil değiştirme)

2- Geometrik Doğrusal Olmayan Davranışı (Geometric Nonlinearity)

Deformasyonların yapının ilk geometrisine göre büyük olduğu, dolayısıyla rijitlik matrisinin deformasyonla birlikte değiştiği durumlardır. (Örnek: İnce kabuk yapılarında burkulma, büyük deplasmanlı membran deformasyonu.)

3- Sınır Koşulu veya Temasın Doğrusal Olmayan Davranışı (Boundary/Contact Nonlinearity)

Sistemdeki temas yüzeylerinin, sürtünmenin veya bağlanma koşullarının analiz sırasında değiştiği durumlardır. (Örnek: İki yüzeyin ayrılıp tekrar temas etmesi, sürtünmeli temas problemleri). Şekil 3’de sınır koşulu ve kontak durumundan kaynaklı non-linear bir analiz modelini temsil edilmiştir.



Şekil 3: Sac Şekillendirme ile Geometrinin Doğrusal Olmayan Davranışı

4. Doğrusal Olmayan “Non-linear” Çözümde Temel Kavramlar

1- Newton Raphson Yöntemi:

Doğrusal olmayan (non-linear) sonlu elemanlar analizlerinde, sistemin denge denklemleri genellikle doğrusal olmayan biçimde yazılır ve bu denklemlerin kapalı formda çözümü mümkün değildir. Bu nedenle, denge koşulu yaklaşık ve iteratif yöntemlerle sağlanır. Bu iteratif çözüm tekniklerinin en yaygın ve etkili olanı Newton-Raphson yöntemidir.

Yöntemin temel ilkesinde kullanılan genel denge denklemi şu eşitlik ifade edilir:

$$R(u) = F_{ext} - F_{int}(u) = 0 \quad (1)$$

Burada:

$R(u)$: Artık (kalan) (residual) kuvvet vektörü,

F_{ext} : Uygulanan dış yük vektörü,

F_{int} : İç kuvvet (gerilme tabanlı) vektörüdür.

Bu denklemin çözümü, yapının yer değiştirmelerini (u) bulmak anlamına gelir. Ancak $F_{int}(u)$ yer değiştirmeye bağlı olarak doğrusal olmayan bir şekilde değiştiğinden, $R(u) = 0$ doğrudan çözülemez.

Newton-Raphson yaklaşımında yöntem, doğrusal olmayan bir fonksiyonun kökünü bulmak için Taylor serisi açılımı ve doğrusal yaklaşım prensibini kullanır.

Her iterasyon adımı, sistem denklemi şu şekilde doğrusallaştırılır:

$$R(u_i) + K_t(u_i)\Delta u_i + 1 = 0 \quad (2)$$

Burada:

u_i : i. iterasyondaki yer değiştirme vektörü,

$\Delta u_i + 1$: Bir sonraki yer değiştirme artımı,

K_t : Tanjant rijitlik matrisi, sistemin o anki doğrusal yaklaşımının rijitliği.

Yeni yer değiştirmeler şu şekilde güncellenir:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_i + 1 \quad (3)$$

Bu işlem, kalan kuvvet R belirli bir yakınsama kriteri (örneğin kuvvet yakınsama kriteri $< \%1$) sağlanana kadar tekrarlanır.



2- Yakınsama (Convergence) Kavramı:

Doğrusal olmayan (non-linear) sonlu elemanlar analizlerinde çözüm iteratif bir süreçtir. Bu süreçte her adımda R küçülmeli ve sistem dengeye yaklaşmalıdır. Çözümün başarıyla tamamlanabilmesi için belirli bir yakınsama kriteri (convergence criterion) sağlanmalıdır.

Yakınsama, genellikle sistemin kalan kuvvetinin, yer değiştirmesinin veya enerjisinin belirli bir tolerans altında düşmesiyle tanımlanır.

Yakınsama kriterlerinden aşağıdaki gibi açıklanabilir:

Kuvvet Normu: Kalan kuvvetlerin büyüklüğünün, dış yüklerin büyüklüğüne oranıdır. Kuvvet Normu, denge koşulunun ne kadar sağlandığını gösterir.

$$\| F_{ext} \| / \| R \| \leq \epsilon_f \quad (4)$$

Burada ϵ_f , kullanıcı tarafından belirlenen yakınsama toleransıdır. Genellikle $10^{-1} - 10^{-2}$ aralığındadır. Bu koşul sağlandığında, düğüm kuvvetleri arasındaki dengesizlik kabul edilebilir seviyededir ve sistem dengeye ulaşmış kabul edilir.

Yer Değiştirme Normu: İterasyonlar arası yer değiştirme farkının büyüklüğünü hesaplar. Yapının şekil değişimi açısından stabil hale gelip gelmediğini gösterir. Ardışık iterasyonlarda hesaplanan yer değişimlerin farkına dayanır.

$$\| u_i \| / \| \Delta u_i \| \leq \epsilon_u \quad (5)$$

Eğer bu oran küçükse, sistemin artık yeni bir şekil değişimine ihtiyacı kalmamıştır. Yani yer değiştirme alanı kararlı hale gelmiştir.

Enerji Normu: Enerji normu, sistemdeki potansiyel enerji farkı üzerinden yakınsamayı değerlendirir

$$| E_{i+1} - E_i | / | E_i | \leq \epsilon_E \quad (6)$$

Bu kriter özellikle temas, plastik hale gelme ve karmaşık enerji değişimlerinin bulunduğu güvenilir bir ölçüttür.



3- Yük Adımı (Load Step) ve Artım (Increment) Kavramları:

Doğrusal olmayan (non-linear) sonlu elemanlar analizlerinde, sistemin denge denklemleri doğrudan çözülemediğı için yükleme işlemi kademeli olarak uygulanır. Bu süreçte yük adımı (load step) ve artım (increment) kavramları, çözümün kontrolünü ve kararlılığını sağlamak açısından kritik öneme sahiptir.

“Load Step”: Yük adımı, analiz sürecinde tanımlanan bağımsız bir yükleme veya sınır koşulunun evresini ifade eder. Her yük adımı, sistemin belirli bir fiziksel durumunu temsil eder ve genellikle analizde önemli bir olayın veya yükleme koşulunun değıştiğı noktaya karşılık gelir. Marc yazılımında bir yük adımı içerisinde yeni bir yük, sıcaklık, sınır koşulu veya temas tanımı devreye girebilir. Malzeme modeli veya çözüm kontrol parametreleri değıştirilebilir. Örneğın bir modelde önce 1000 N kuvvet uygulanıp daha sonra sıcaklık yüklemesi yapılacaksa, bu iki durum genellikle iki ayrı yük adımı olarak tanımlanır.

“Increment”: Artım (increment), bir yük adımıdaki yükün veya deplasmanın küçük bir kısmının uygulanması anlamına gelir. Marc doğrusal olmayan sistemlerde yakınsamayı sağlamak için toplam yükü tek seferde değıl, birden fazla küçük artım (load increment) halinde uygular.

Her artımda uygulanan yük veya deplasman belirli bir oranda artırılır, sistem için yeni bir denge konfigürasyonu hesaplanır ve Newton – Raphson iterasyonları yardımıyla bu artım altında denge sağlanır.

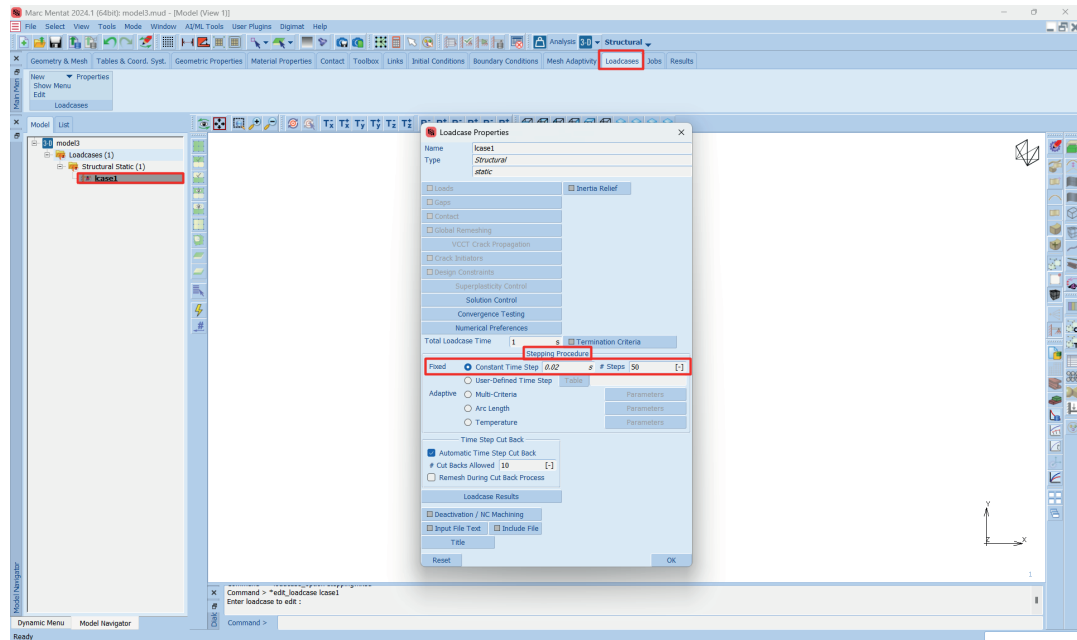
Artım sayısı çözüm kararlılığını doğrudan etkilemektedir. Çok büyük artımlar ile yakınsama zorluğu ve çözüm hatası alınabilmesi yüksek bir ihtimaldir. Çok küçük artımlar ise daha uzun çözüm sürelerine sebebiyet verebilmektedir. Marc’ da otomatik bir şekilde çözüm artımlarını kontrol edebilmek mümkündür. Eğer analizin yakınsaması kolay oluyorsa “increment” sayısını artırarak daha hızlı bir şekilde analiz çözdürebilirken, analizin yakınsaması zorlaşıyorsa “increment” sayısını artırarak analiz yakınsatılabilir. Kısaca Marc yazılımı yakınsama durumuna göre “increment” büyüklüğünü dinamik olarak ayarlayabilir.

5. Marc-Mentat Arayüzündeki “Stepping Procedure” Ayarları

Marc-Mentat'ta “Stepping Procedure”, genel olarak iki ana çözüm yaklaşımını desteklemektedir. “Fixed” ve “Adaptive” olarak iki ayrılmaktadır bu yaklaşımlar.

1- Sabit Zaman Adımları (Fixed Time Steps):

A) “Constant Time Step”: Bu çözüm yönteminde çözüm sabit bir zaman adımıyla ilerler. Örneğin, 0.02 saniye seçilirse her adımda çözüm 0.02 saniye ilerletilir ve toplam 50 adımda 1 saniyelik analiz yapılmaktadır. Bu yöntemin avantajı hesaplama düzenli ve kontrol edilebilir olmasıdır. Dezavantajı ise karmaşık doğrusal olmayan davranışlarda adım boyutu çok büyük ise yakınsama sorunu çıkabilmektedir. Genellikle doğrusal (linear) dinamik analizler, daha basit doğrusal olmayan analizlerde kullanılmaktadır. Gereksiz küçük adımlar seçilirse çözüm süresi uzamaktadır.

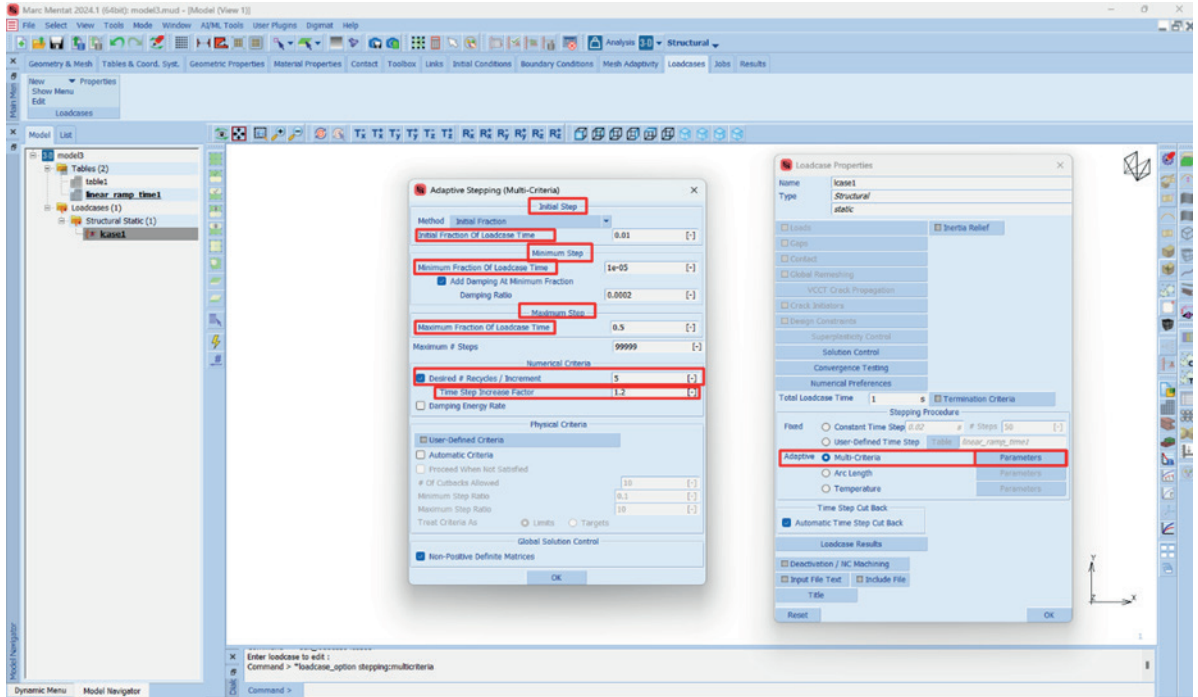


Şekil 4: Marc-Mentat Arayüzünde “Constant Time Step”

B) “User - Defined Time Step”: Bu çözüm yönteminde, kullanıcı zaman adımlarını tablo şeklinde manuel tanımlamaktadır. Örneğin, analizin ilk 0.1 saniyesi için 0.01 saniyelik bir adım sonraki 1 saniyelik için 0.05 saniyelik adımlar ile analiz çözümünü kontrol edebilir. Bu çözüm yöntemi ile analizin farklı bölgelerinde farklı hassasiyetler ile problemin çözümüne ulaşılabilir. Genellikle karmaşık yükleme durumları (örneğin ani darbe + daha sonra yavaş yük artışı) gibi analiz modellerinde kullanılabilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta ise kritik olayların yaşandığı bölgelerde küçük adımlar tanımlanmalıdır.

2- “Adaptive Time Steps”

A) “Multi-Criteria”: Bu çözüm yönteminde çözücü, yakınsamaya göre adım boyutunu otomatik olarak ayarlar. Eğer yakınsama sağlanamıyorsa adım küçültülür; çözüm kolay ilerliyorsa adım büyütülür. Kullanıcı, parametreler ile minimum ve maksimum adım boyutunu tanımlayabilir.”Adaptive time step” kullanıldığında, Marc doğrusal olmayan davranışını çözmek için uygun zaman adımına kendisi karar verir. Bu kararın hangi koşullar altında verileceği ise “Parameters” bölümünden ayarlanabilir. Örneğin 1 birim olan bir analizde başlangıç zaman adımı, “Loadcase Time” değerinin %1’i olarak tanımlanmış olsun. Eğer Marc bu adımda yakınsamayı sağlayamaz ve zaman adımını küçültmesi gerekirse, çözüm süreci “Minimum Fraction of Loadcase Time” değerinin altına düşmeyecek şekilde devam eder. Yani analize bir alt limit konulabilir. Veya analiz yakınsıyor olduğunda ise zaman adımını büyültmek istenilirse Marc’da bu zaman adımının nereye kadar büyültülebildiğinin kontrolünü “Maximum Fraction Of Loadcase Time” ile kontrol edebiliriz. Parameters seçeneğinde increment yani analizin sonuç yazdığı adım sıklığının kontrolü yapılabilmektedir. Marc her bir increment içerisinde birden fazla cycle yapabilir. Bir increment da kaç tane “Cycle” yapılmak isteniliyorsa “Recycles” “Increment” değeri ile cycle değeri girilebilmektedir. Eğer analizin yakınsaması hızlı bir şekilde ilerliyorsa “Time Step Increase Factor” değeri ile bir sonraki time step değerini scale değeri artırılabilir.



Şekil 5: Marc-Mentat Arayüzünde Multi-Criteria Parametre Ayarları



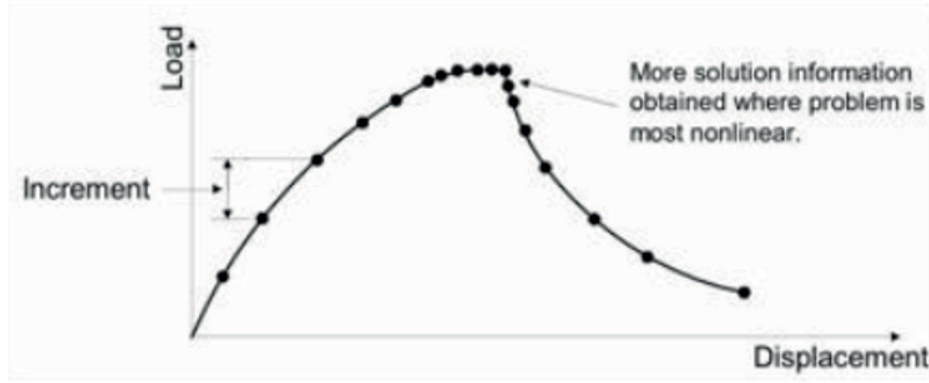
B) “Arc Length Method”: Bu çözüm yönteminde çözücü, klasik zaman veya yük artışı yerine çözüm yolunun tamamı “arc length” takip edilir. Özellikle yük-deformasyon eğrisinde limit yük, burkulma, “snap-through” gibi durumlarda kullanılması tercih edilmektedir. Çözücü, sadece yük değil hem yük hem de yerdeğiştirmeyi birlikte kontrol ederek çözümü ilerletir. Genellikle yapısal stabilite problemleri (burkulma, kabuk çökmesi) ve “lateral buckling”, “snap-through” gibi çözüm yolunun ters döndüğü problemlerde tercih edilmektedir. Dikkat edilmesi gerekenler ise başlangıç “arc-length” parametreleri iyi seçilmelidir. Yük-sehim eğrisinin tüm dalgalanmalarını izlenmesi için tercih edilmelidir. Normal statik analizlerde gereksiz şekilde kullanılmamalıdır. Kısacası “Adaptive” “Arc Length” çözüm yöntemi ile bir sonraki yük artışı, önceki yük artışının açısal uzunluk büyüklüğü ile çarpılmasıyla değerlendirilir.

$$\Delta Fi = \Delta \lambda \cdot F \quad (7)$$

“MODIFIED RIKS-RAMM” YÖNTEMİ: Bu yöntem varsayılan “default” ark uzunluğu yöntemidir. “Riks-Ramm” yönteminin, temas problemlerini daha verimli çözebilmesi için değiştirilmiş bir veriyonudur. “Riks-Ramm” yönteminde ise doğrusal bir kısıt denklemi kullanılmaktadır. Bu sayede daha kararlı bir çözüm elde edilmektedir fakat analizin yakınsaması daha yavaş olabilmektedir. Genel olarak temas analizlerinde, “Modified Riks-Ramm” veya “Crisfield” yöntemi uygundur. Eğer artık kuvvetlerde ani değişim beklenilmiyorsa, “Crisfield” yöntemi genellikle daha verimli sonuçlar verir. Analiz parametre ayarları ile “initial fraction”, “maximum fraction”, “increments in loadcase” ve “recycles” ayarları ile analiz yakınsama ayarları kontrol edilebilir.

Sık karşılaşılan kullanıcı hataları ise;

- İstenilen “recycle” sayısının çok yüksek seçilmesiyle çok büyük bir ark uzunluğu ve dolayısıyla çok büyük bir yük adımı “load step” oluşturulması.
- Maksimum yük adımı tanımlanıp ark uzunluğuna sınırlama getirilmemesi ile bağlanıçta doğrusal davranış gösteren bir problemde aşırı büyük yük adımlarına neden olabilir.
- Maksimum “recycle” sayısının, istenen “recycle” sayısına eşit ayarlanması ile problemin doğrusal olmama davranışı azaldığında analizin durmasına neden olmaktadır.
- Yakınsama toleransının çok yüksek seçilmesi ile “Crisfield” yönteminde gerçek kök bulunamamasına veya ani yük yönü değişimine yol açabilir.



Şekil 6: Örnek Arc-Length Yakınsama Grafiği

C) “Temperature Controlled Stepping”: Bu çözüm yönteminde analiz adımlarının ilerlemesi sıcaklık değişimine göre kontrol edilmektedir. Yani zaman veya yük kullanılmazken sıcaklıktaki artış/azalış adımları ile ilerletilir. Genel olarak termomekanik analizler (kaynak, ısıtma işlemi, sıcaklık gradyanı etkileri) analizlerinde kullanılmaktadır. Sıcaklığın doğrusal olmayan davranış üzerindeki etkisinin kritik olduğu durumlarda da kullanılmaktadır. Dikkat edilmesi gerekenler ise sıcaklık adımları çok büyük seçilirse malzeme davranışı doğru yakalanmayabilir. Özellikle faz dönüşümleri, malzeme yumuşaması gibi olaylarda hassas ayarlama yapılmalıdır.

6. Genel Seçim Kriterleri ve “Cut-Back”

1- Çözüm Yöntemlerinde Seçim Kriterleri

A) Sabit Adım “Constant” “User-Defined”: Basit analizler, lineer veya basit doğrusal olmayan analizlerde seçilebilir.

B) “Multi-Criteria”: Genel amaçlı, Genel amaçlı doğrusal olmayan çözümler, özellikle temas içeren analizlerde ve plastik deformasyonun söz konusu olduğu problemlerde en güvenilir yöntemlerden biri olarak kabul edilmektedir. Geniş kapsamlı yakınsama ayarları sayesinde, yakınsama güçlüklerinin giderilmesinde sıklıkla tercih edilmektedir

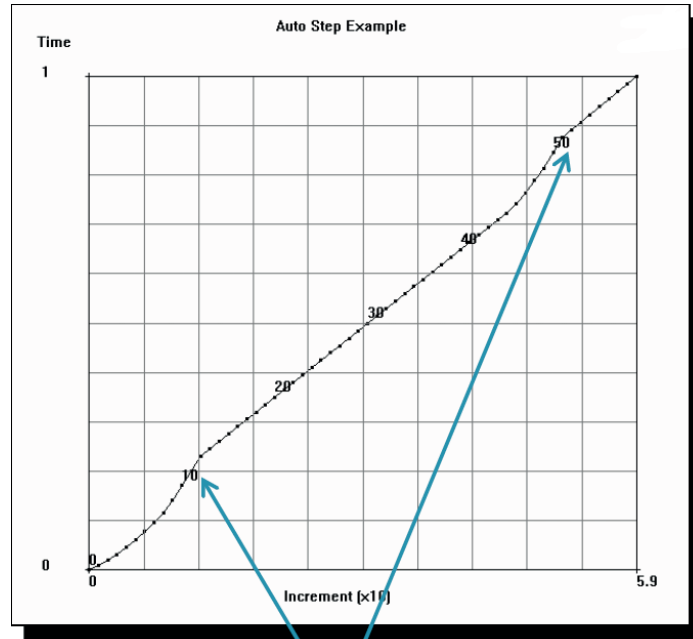
C) “Arc-Length”: Burkulma, stabilite, snap-through gibi ileri seviye yapısal analizlerde tercih edilebilir.

D) “Temperature Controlled”: Termomekanik veya sıcaklık gradyanı önemli olan analizlerde tercih edilebilir.

2- “CUT-BACK NEDİR” ?

Doğrusal olmayan analizlerde çözümün stabil ve yakınsama sağlayarak ilerlemesi kritik öneme sahiptir. Cut-back, bir yük/şema artımı (load/time increment) için yapılan iteratif çözüm sürecinde yakınsama sağlanamadığında çözüm sırasında anlık kullanılan zaman artımı değerini geri alıp, artım değerinin büyüklüğünü küçülterek (genellikle daha önceden belirlenen çarpan ile) aynı artımı yeniden denemesi işlemidir. Amaç o anki artım için daha küçük bir yük artımı uygulayarak iteratif yöntemin yakınsamayı sağlamasını mümkün kılmaktır.

Doğrusal olmayan analizlerde malzeme plastisitesi, büyük deformasyon, geometrinin doğrusal olmayan davranışı, kontaklardaki ani durum değişiklikleri, takip eden kuvvetler gibi nedenlerden bir adım sırasında denklem seti çözücü tarafından çözülemediği durumlarda “cut-back” olayı görülebilmektedir.



Step cut-back

Şekil 7: Cut-Back Durumu



7. Sonuçlar

Bu alışmada, Marc-Mentat yazılımlında bulunan doğrusal olmayan analiz çözüm yöntemleri ve analizleri hakkında teknik bilgi aktarımı yapılarak kullanıcıların bu tip (non-linear) özüm yöntemleri hakkında bilgilendirilmesi gerçekleştirilmiştir..

8. Referanslar

1. Marc Help Documentation
2. MAR 101 Course Notes