

# SONLU ELEMEN ANALİZLERİNDE STRESS HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

HAZIRLAYAN

GÖKHAN ÖZEL

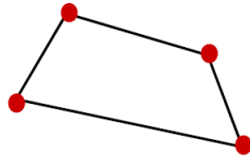
*Lider Yapısal Analiz Mühendisi*

Yayın Tarihi: 07.03.2022

Sonlu eleman yöntemiyle gerçekleştirilen mukavemet analizlerinde, uygulanan yükler altında yapı üzerinde gözlemlenen stress ve ilgili malzeme dayanım değerleri kıyaslanır. Hesaplanan bu stress değeri ise matris çözümlerinden elde edilmiş olan çıktılarının farklı şekillerde işlenmesi sonucu farklı mertebelerde görüntülenebilir. Bu yazı kapsamında kullanılan numerik algoritmalar ve mühendislik yorumlama teknikleri MSC Nastran/Patran üzerinden örnekler ile ele alınmıştır.

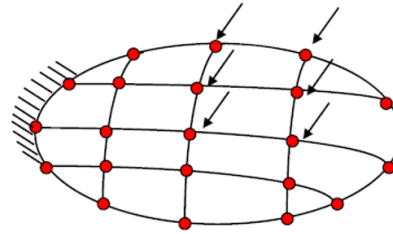
## 1. HESAPLAMA ALGORİTMALARI

Lineer statik çözüm denklemleri için ( $F = K \cdot U$ ), global katılık matrisinin ( $K$ ) oluşturulmasında modeldeki her bir eleman için çıkarılan lokal katılık matrisleri birleştirilir. Kullanıcı tarafından tanımlanan yükler ( $F$ ) ile birlikte yapılan çözüm, modelde bulunan her bir node üzerindeki 6 yönlü deplasman değerlerini matris formunda ( $U$ ) elde eder. Bu noktaya kadar herhangi bir fiziksel varsayım veya matematiksel işlem yapılmadığı için sonlu eleman analizlerinin en temel ve işlenmemiş çıktısı deplasmanlardır.



$$[k]_e \{u\}_e = \{f\}_e$$

Elemental Equation

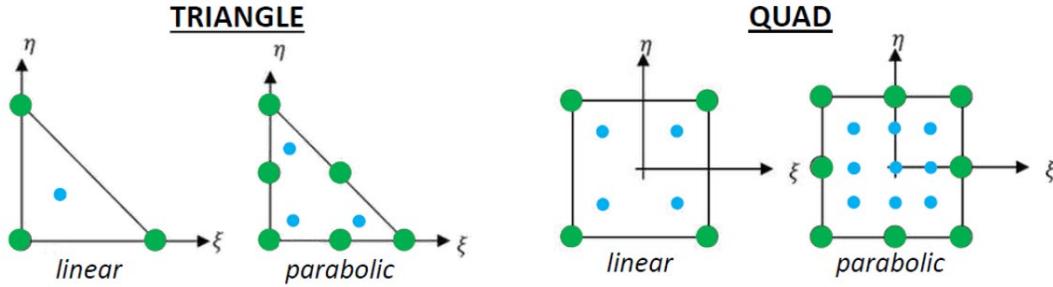


$$[K] \{u\} = \{F\}$$

Global Equation

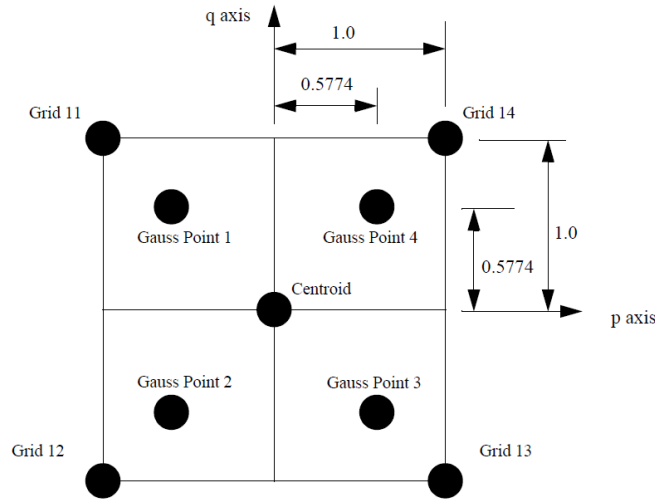
Görsel 1 – Lineer Statik Çözümünde Lokal ve Global Denklemler

Stress/strain ise, analitik tanım itibariyle ilgili sonlu elemanın her bir noktası için çözümü zor olan kısmi diferansiyel denklemler sonucu elde edilebilir. Ticari sonlu eleman çözümleri yaygın olarak, matematiksel manipülasyonlar ile elde edilmiş ve çözümü daha kolay olan alternatif denklemleri (**'Weak Form'**) kullanır. Her bir elemanın taradığı alanın tamamı için doğrudan analitik integral almak yerine, bu denklemler üzerinden sadece belirli noktalar için numerik integral yakınsaması gerçekleştirilir. Bu tanımlı noktalar **Gauss İntegral Hesap Noktaları** olarak isimlendirilir ve aşağıda örneklendirilmiştir.



Görsel 2 – Üçgen ve Dörtgen Elemanlardaki Tanımlı Node (yeşil) ve İntegral Hesap (mavi) Noktaları

Her bir eleman için “doğal” eksen takımına (p, q) göre Gauss noktalarının koordinatları parametrik olarak belirlenir. Kalite metriklerindeki düşüklük/bozukluk durumları bu noktaların tayininde etkiye sahiptir. İdeal formdaki (Jacobian=1.0) birinci derece dörtgen eleman için örneklendirme aşağıdaki görselde verilmiştir.



Görsel 3 – Birinci Derece Dörtgen Eleman Gauss Noktaları

Node'lardaki deplasmanların global çözümden elde edilmesinden sonra, eleman içi tanımlı Gauss noktaları için arka planda öncelikli olarak strain değerleri hesaplanır. Daha sonrasında strain değerleri üzerinden malzeme özellikleri kullanılarak stress değerlerine ulaşılır. Dolayısıyla bu sayısal değerler, ilgili eleman kabiliyetleri kapsamında numerik işlemler yapılarak elde edilir ve eleman özelinde lokal sonuç çıktılarıdır.

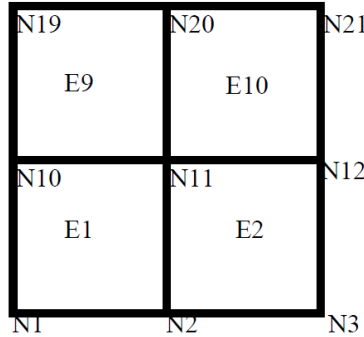
MSC Nastran tarafından Gauss noktalarında hesaplanan değerler herhangi bir çözüm dosyası içerisine yazdırılmamaktadır. Koşuturulan analiz için STRESS çözüm çıktısı istenildiğinde, varsayılan olarak “**Bilinear Extrapolation (BILIN)**” yöntemi kullanılır. Bu yöntemde, elemanı oluşturan node’lardaki ve eleman merkezindeki değerler Gauss noktalarındaki değerler kullanılarak parametrik haritalandırma ile hesaplanır.

Aşağıdaki görselde örnek F06 dosya içeriği üzerinden, eleman merkezi (CEN/4) ve elemanı oluşturan node’lar için hesaplanan değerlerin farklılığı gösterilmiştir.

STRESSES IN QUADRILATERAL ELEMENTS (QUAD4)											OPTION = BILIN
ELEMENT ID	GRID-ID	FIBER DISTANCE	STRESSES IN ELEMENT COORD SYSTEM			PRINCIPAL STRESSES (ZERO SHEAR)			VON MISES		
			NORMAL-X	NORMAL-Y	SHEAR-XY	ANGLE	MAJOR	MINOR			
65	CEN/4	-5.000000E-01	2.077789E+04	-2.837440E+00	-1.642151E+02	-0.4527	2.077919E+04	-4.135032E+00	2.078126E+04		
		5.000000E-01	-1.971581E+04	2.908182E+00	2.141169E+02	89.3779	5.232909E+00	-1.971814E+04	1.972075E+04		
109	CEN/4	-5.000000E-01	2.126709E+04	-2.635510E+02	-1.642333E+02	-0.4370	2.126834E+04	-2.648037E+02	2.140197E+04		
		5.000000E-01	-1.919296E+04	2.513843E+02	2.140552E+02	89.3694	2.537405E+02	-1.919532E+04	1.932344E+04		
118	CEN/4	-5.000000E-01	2.126709E+04	2.578761E+02	-1.642751E+02	-0.4480	2.126837E+04	2.565917E+02	2.114125E+04		
		5.000000E-01	-1.919296E+04	-2.455679E+02	2.140950E+02	89.3527	-2.431491E+02	-1.919538E+04	1.907497E+04		
119	CEN/4	-5.000000E-01	2.028869E+04	2.578761E+02	-1.641968E+02	-0.4696	2.029004E+04	2.565302E+02	2.016300E+04		
		5.000000E-01	-2.023866E+04	-2.455679E+02	2.141786E+02	89.3863	-2.432738E+02	-2.024096E+04	2.012042E+04		
110	CEN/4	-5.000000E-01	2.028869E+04	-2.635510E+02	-1.641551E+02	-0.4576	2.029000E+04	-2.648620E+02	2.042372E+04		
		5.000000E-01	-2.023866E+04	2.513843E+02	2.141389E+02	89.4013	2.536220E+02	-2.024090E+04	2.036890E+04		

Görsel 4 – F06 Dosyası İçerisindeki Element Stress Bilgileri

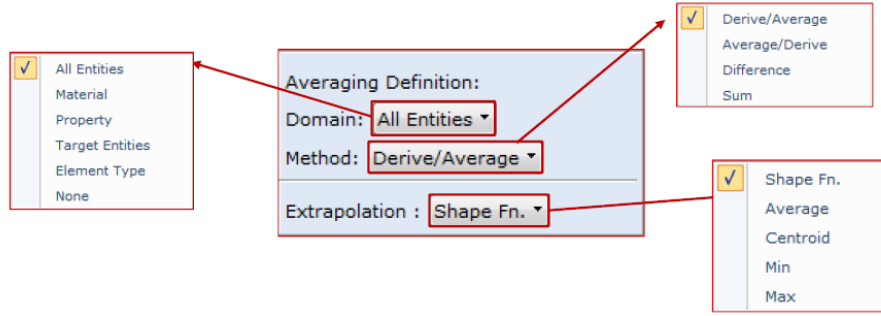
Fakat pratikteki analiz modelleri tek bir eleman yerine, birden fazla elemanın ortak node bağlantısı yapması ile oluşmaktadır. Her bir node için bağlı elemanların ayrı ayrı hesapladığı birden fazla sayısal sonuç bulunmaktadır. Bu durum aşağıda basit bağlantılı bir model üzerinden örneklendirilmiştir.



Node 11	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}$	$\tau_{yz}$	$\tau_{zx}$
E1	68.37	12.16	0.00	-19.73	0.00	0.00
E2	59.37	10.16	0.00	-20.73	0.00	0.00
E9	67.37	11.16	0.00	-18.73	0.00	0.00
E10	100.37	14.16	0.00	-30.73	0.00	0.00

Görsel 5 –Ortak Bağlantı Node’u İçin Hesaplanan Stress Değerleri

Söz konusu olan farklı değerlerin ara yüz üzerinden tek bir değere indirgenip görüntülenmesi için, MSC Patran içerisindeki seçenekler aşağıdaki şekildedir.



Görsel 6 – Patran Sonuç Görüntüleme Seçenekleri

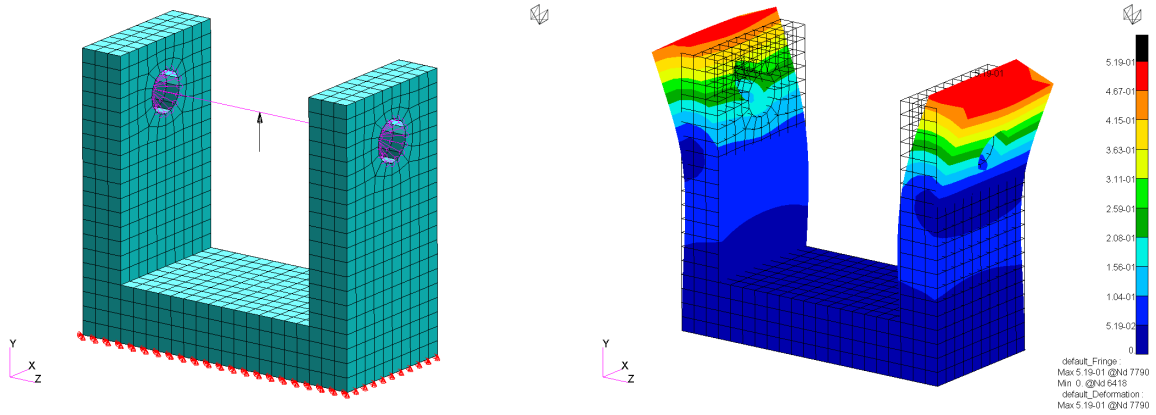
Domain	<b>All Entities</b>	Node değerleri için bütün elemanların hesapladığı değerler ile çalışır. Elemanların seçili olup olmamasından bağımsız olarak tüm elemanların etkisini içerir.
	<b>Material</b>	Node değerleri için bağlı ve aynı malzeme tanımlı elemanların hesapladığı değerler ile çalışır.
	<b>Property</b>	Node değerleri için bağlı ve aynı property tanımlı elemanların hesapladığı değerler ile çalışır.
	<b>Target Entities</b>	Node değerleri için bağlı elemanlardan seçili olanların hesapladığı değerler ile çalışır. Belirli elemanlara ait sonuçların etkisini görmemek için bu seçenek ile çalışılmalıdır.
	<b>Element Type</b>	Node değerleri için aynı tipteki elemanların hesapladığı değerler ile çalışır.
	<b>None</b>	Her bir eleman tekil olarak değerlendirilir ve bağlı elemanlardan gelen sonuçlar dikkate alınmaz.
Method	<b>Derive/Average</b>	Stress tensörü öğeleri $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ kullanılarak hesaplanan Von Mises gibi değerler için: Önce eleman node'larındaki değerleri hesaplar, sonra ortak node'lar için hesaplanan değerleri averajlar.
	<b>Average/Derive</b>	Stress tensörü öğeleri $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ kullanılarak hesaplanan Von Mises gibi değerler için: Önce eleman node'larındaki öğeleri hesaplar, sonra averajlı öğeleri kullanarak değerleri hesaplar.
	<b>Difference</b>	Node'lar için farklı elemanların hesapladığı maksimum ve minimum değerler arasındaki farkı hesaplar Kalite kontrol yöntemi olarak değerlendirilir.
	<b>Sum</b>	Node'lar için farklı elemanların hesapladığı değerleri toplar.
Extrapolation	<b>Shape Function</b>	Eleman kabiliyetleri doğrultusunda, eleman içi sonuçları haritalandırarak gösterir.
	<b>Average</b>	Eleman içerisindeki hesaplanan sonuçlarının ortalamasını tüm eleman için gösterir.
	<b>Centroid</b>	Eleman merkezindeki sonucu tüm eleman için gösterir.
	<b>Min</b>	Eleman içerisindeki hesaplanan sonuçlarının minimum'unu tüm eleman için gösterir.
	<b>Max</b>	Eleman içerisindeki hesaplanan sonuçlarının maximum'unu tüm eleman için gösterir.

Yukarıdaki seçenekler Patran'da seçili olan tüm elemanlar için uygulanabilir. Fakat sonuç değerlendirme esnasında, **aynı averajlama kümesine dahil edilmemesi gereken** elemanlar özellikleri aşağıdaki şekildedir:

- Farklı tipte oluşturulmuş
- Farklı malzeme tanımlı içeren
- Farklı kalınlık ataması içeren
- Aynı düzlemde yer almayan
- Farklı koordinat sistemi atalı

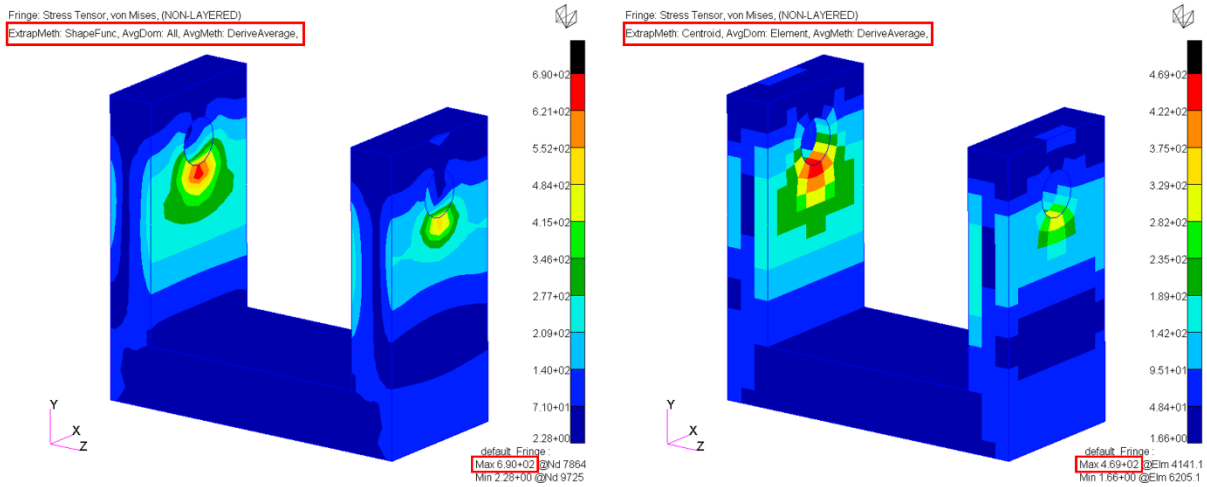
## 2. ÖRNEK MODEL VE İNCELEMELER

İnceleme modeli olarak, U profil kesitinde bulunan çelik bir parça taban kısmından tutularak pin hizasından yukarı yönlü kesme kuvveti altında bırakılmıştır. Aşağıdaki görselde model tanımı ve deformasyon sonuçları verilmiştir.



Görsel 7 – İkinci Analiz Modeli ve Deformasyon Sonuçları

Hex elemanlar üzerinden iki farklı metotla okunulan Von Mises Stress sonuçları aşağıda gösterilmiştir.



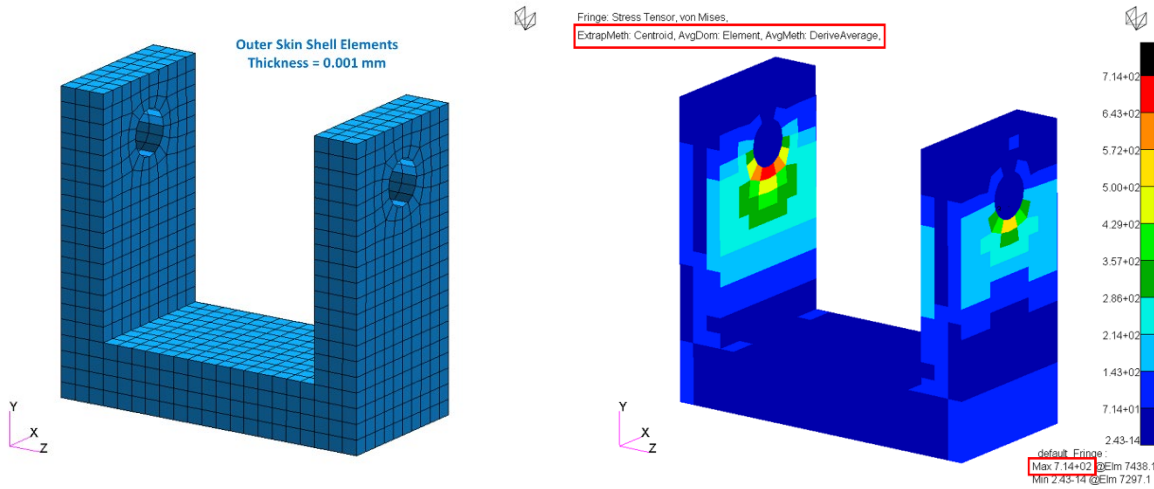
Görsel 8 – Averajlanmış ve Averajlanmamış Von Mises Stress Sonuçları

Pin yuva bölgesinde gözlenen maksimum stress sonuçları:

Element	Domain	Extrapolation	Maximum Von Mises Stress
Solid (Hex)	All Entities	Shape Function	690 MPa
Solid (Hex)	None	Centroid	469 MPa

'Hexahedron' elemanlarla örülmüş modellerde, eğilme senaryosu altında kalan bölgeler için eleman merkezlerinde görüntülenen stress değerleri genellikle düşük mertebelerde hesaplanır. Bu durum, fiziksel olarak eğilme durumlarındaki kritikliğin en dış yüzeylerde olmasından kaynaklanır. Örnek model üzerinde de haritalandırılmamış ve averajsız sonuçlar **olması gerekenden %32 daha düşük** okunmuştur. Dolayısıyla, mukavemet değerlendirmesinin doğruluğu için haritalandırılmış ve averajlanmış sonuçlar kullanılmalıdır.

Alternatif olarak, katı elemanlar ile aynı malzeme özelliğine sahip ve kalınlığı çok düşük olacak şekilde dış yüzey kabuk elemanları örülerek incelemeler yapılabilir. Aynı model üzerinden, **dış yüzey kabuk elemanları örüldükten sonra** alınan sonuçlar aşağıda paylaşılmıştır. Yapının kritik noktasının değişmediği ve sonuçlarda mertebe olarak %3.5 fark oluştuğu tespit edilmiştir.



Görsel 9 – Dış Yüzey Kabuk Elemanları Von Mises Stress Sonuçları

Pin yuva bölgesinde gözlenen maksimum stress sonuçları:

Element	Domain	Extrapolation	Maximum Von Mises Stress
Solid (Hex)	All Entities	Shape Function	690 MPa
Shell (Quad)	None	Centroid	714 MPa

### 3. REFERANSLAR

- I. MSC Patran User Manual (DOC10490): Introduction to Results Postprocessing
- II. PAT301A Course Notes – Result Postprocessing in MSC Patran
- III. [https://www.ata-e.com/wp-content/uploads/2021/10/StressDataRecovery\\_SimcenterNastran\\_191101\\_r1.pdf](https://www.ata-e.com/wp-content/uploads/2021/10/StressDataRecovery_SimcenterNastran_191101_r1.pdf)
- IV. MSC Nastran 2021.2 Quick Reference Guide